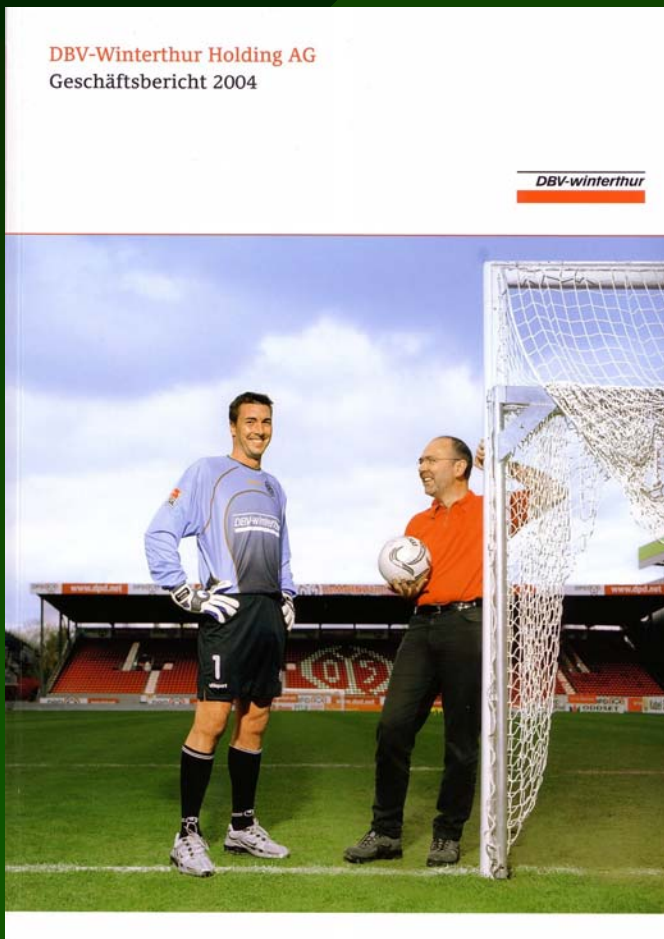
Eine einfache Methode zur Bewertung der Guaranteed Annuity Option

Hans-Otto Herr

Oberwolfach, 24. – 26. Juni 2006

aus berufenem Munde:



DBV-Winterthur Holding AG
Geschäftsbericht 2004

42 Mio. beträgt der Konzern-überschuss der DBV-Winterthur Gruppe.

Partnerschaft aus Begeisterung. Mainz 05 ist 2004 zum ersten Mal in seiner hundertjährigen Vereinsgeschichte in die erste Bundesliga aufgestiegen. Daher haben wir uns entschlossen, eine Sponsoring-Partnerschaft mit dem sympathischsten Verein der ersten Liga zu beginnen.

Dr. Hans-Otto Herr (Titelfoto rechts), Mathematiker und Aktuar in unserem Haus, ist seit seiner Kindheit ein echter Mainz-05-Fan. Dimo Wache ist Torwart der 05er und auf seiner Position einer der besten in Deutschland. Beide eint das Thema Sicherheit: der eine, indem er Tarife berechnet, bei denen wir unseren Kunden eine lebenslange Leistung garantieren, und der andere, indem er den Kasten „sauber hält" und so seiner Mannschaft den Rücken freihält.

Problem: Fondsgebundene RV

Bei Vertragsschluss wird Verrentungsfaktor garantiert, obwohl Unsicherheit besteht, über

– die Höhe des zu verrentenden Kapitals (diese hängt von der Fondsperformance ab)

– den zum Verrentungstermin gültigen Marktzins (dieser ist korreliert mit der Fondsperformance)

– Die Änderungen der Sterblichkeiten lassen wir im Folgenden unberücksichtigt; dies ist auf naheliegende Weise möglich

Die exakte Aufgabenstellung

Ein Kunde kauft per <u>***t = 0***</u> für einen Betrag 1 Fondsanteile zum Kurs K_0, (o.B.d.A. $K_0 = 1$).

Ebenfalls per <u>***t = 0***</u>*:* Als Verrentungsfaktor wird $G = G(x,n,g)$ (*guaranteed annuity conversion factor*) festgelegt.

Per <u>***t = n***</u> hat der Kunde das Recht, den Kurswert dieser Fondsanteile K_n gegen eine lebenslange Rente in Höhe von $R = R(x,n,g) = K_n \cdot G$ einzutauschen.

Ansatz: Zweiteilung

- Eingebettet in Zinsmodell Fabozzi et. al. mit korrelliertem Fondsprozess
  – bestimme per Verrentung Modell-konsistentes Bewertungsprofil für normierte Rente
  – bestimme im Binomial-Baum Optionswert durch Rückrechnen vom Bewertungsprofil

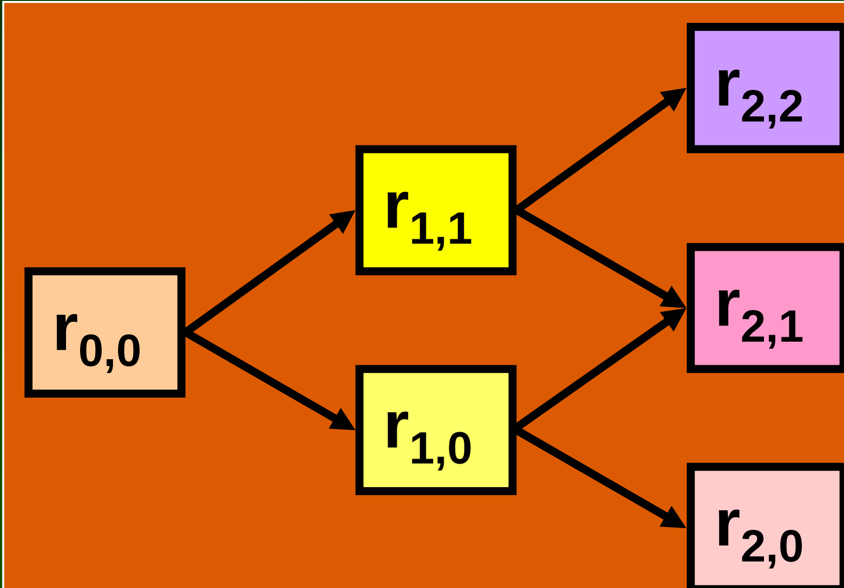
➔ unvollständiger Markt

➔ Zusätzlich einbaubar:

- bilanzielle Aspekte - Überschussbeteiligung

Fabozzi, Kalotay & Williams

- Ein-Faktor Zinsmodell
- Modell ist einfache Version von BDT
- rekombinierender Binomialbaum



$\sigma = Volatilität, 0 < T = Zeithorizont$

$Diskretisierung\ gegeben\ durch\ N:$

$\Delta t = 1/N$

$j = 0,1\ldots, N \cdot T = Zeitindex\ mit$

$t = j \cdot \Delta t$

$k = 0,1,..\ j$

Zeit

$$r_{j,k} = r_{j,k-1} \cdot \exp\left\{2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right\}$$

Das normierte Bewertungsprofil $V_{norm}(\mathcal{F})$

deterministischer Cash-Flow (Sterblichkeit 2. Ordnung ist bekannt)

Bewertung im Baum:

Bestimme Vektor $\mathbf{V_{norm}(\mathcal{F})} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N+1}}$
($N = n/\Delta t$; n = Aufschubzeit, Δt = Länge eines Zeitintervalls im Baum), der pro erreichtem Knoten des Binomialbaumes per Aufschubzeitende Wert der Rente für EB = 1 angibt

Cash Flow

$$R_{j,k} := \begin{cases} G(x,n,g) \cdot p'_{x+n|x+tj} & \textit{für ganzzahliges } t_j \geq g+n \\ G(x,n,g) & \textit{für ganzzahliges } t_j < g+n \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Bewertung

$$\begin{cases} V^R_{\Omega,k} = 0 \text{ für } 0 \le k \le \Omega \quad (Startwerte) \\ \textit{für} \;\; j = \Omega-1, \Omega-2, \ldots, N;\, k = 0, \ldots j: \\ \qquad V^R_{j,k} = e^{-\Delta t \cdot r_{j,k}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(V^R{}_{j+1,k} + V^R{}_{j+1,k+1}\right) + R_{j,k} \end{cases}$$

Sollen Überschüsse berücksichtigt werden, so die $R_{j,k}$ mit Faktoren versehen, die vom Knoten (j,k), der z-Quote etc. abhängen

Bewertung mit Bilanz

$$
\begin{cases}
V^{DK}_{\Omega,k} = 0 \quad \textit{für } 0 \le k \le \Omega \quad (\textit{Startwerte}) \\
\textit{für } \; j = \Omega - 1, \Omega - 2, ..., N : \\
\quad \textit{für } \; k = 0, ... j : \\
V^{DK}_{j,k} = \begin{cases}
e^{-\Delta t \cdot r_{j,k}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (V^{DK}_{j+1,k} + V^{DK}_{j+1,k}) + \\
R^{l}_{j,k} \cdot (\delta^{l}_{t_j} - {}_{t_j - n}V_{x+n} + e^{-\Delta t \cdot r_{j,k}} \cdot {}_{t_{j+1} - n}V_{x+n} \cdot p'_{x+t_j | x+t_{j+1}}) + \\
R^{t}_{j,k} \cdot (\delta^{t}_{t_j} - {}_{t_j - n}V^{gar}_{x+n} + e^{-\Delta t \cdot r_{j,k}} \cdot {}_{t_{j+1} - n}V^{gar}_{x+n} \cdot \{1 - p'_{x+t_j | x+t_{j+1}}\}) \\
\textit{mit } \; \delta^{l}_{t_j} := \begin{cases} 1 \; \textit{falls } t_j \; \textit{ganzzahlig} \\ 0 \; \textit{sonst} \end{cases} \\
\textit{und } \; \delta^{t}_{t_j} := \begin{cases} 1 \; \textit{falls} : g > t_j \; \textit{ganzzahlig} \\ 0 \; \textit{sonst} \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

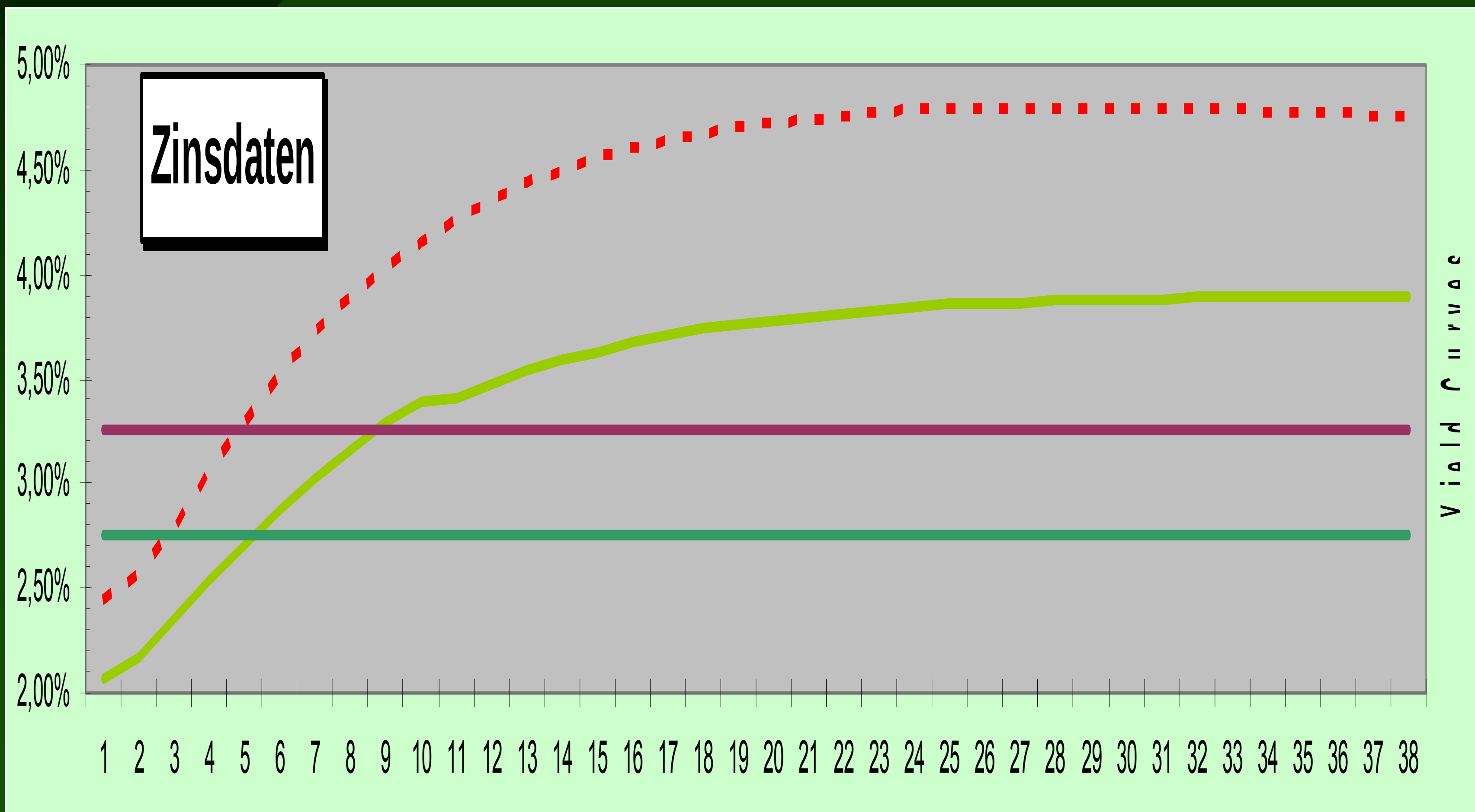
Beispiele zu V_{norm}

Sterblichkeit 1. und 2. Ordnung 100% der DAV94-R für Männer: $x=50$, $n=15$, $g=0$, $i=3.25\%$, RZW=1

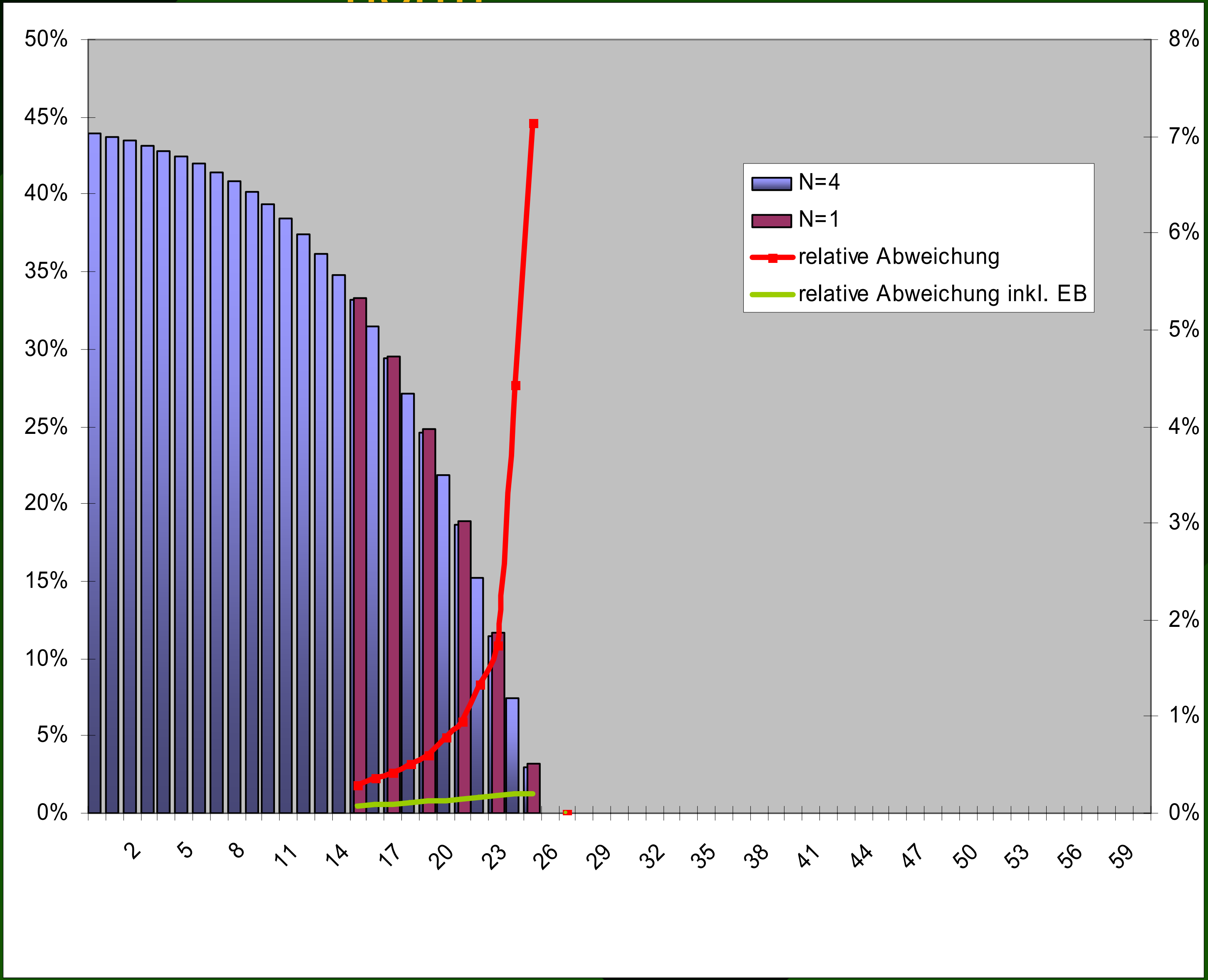
➔ $G(x,n,g) = 0{,}06431$

Zinskurve (Baseline) leider 1 Jahr alte €-Kurve

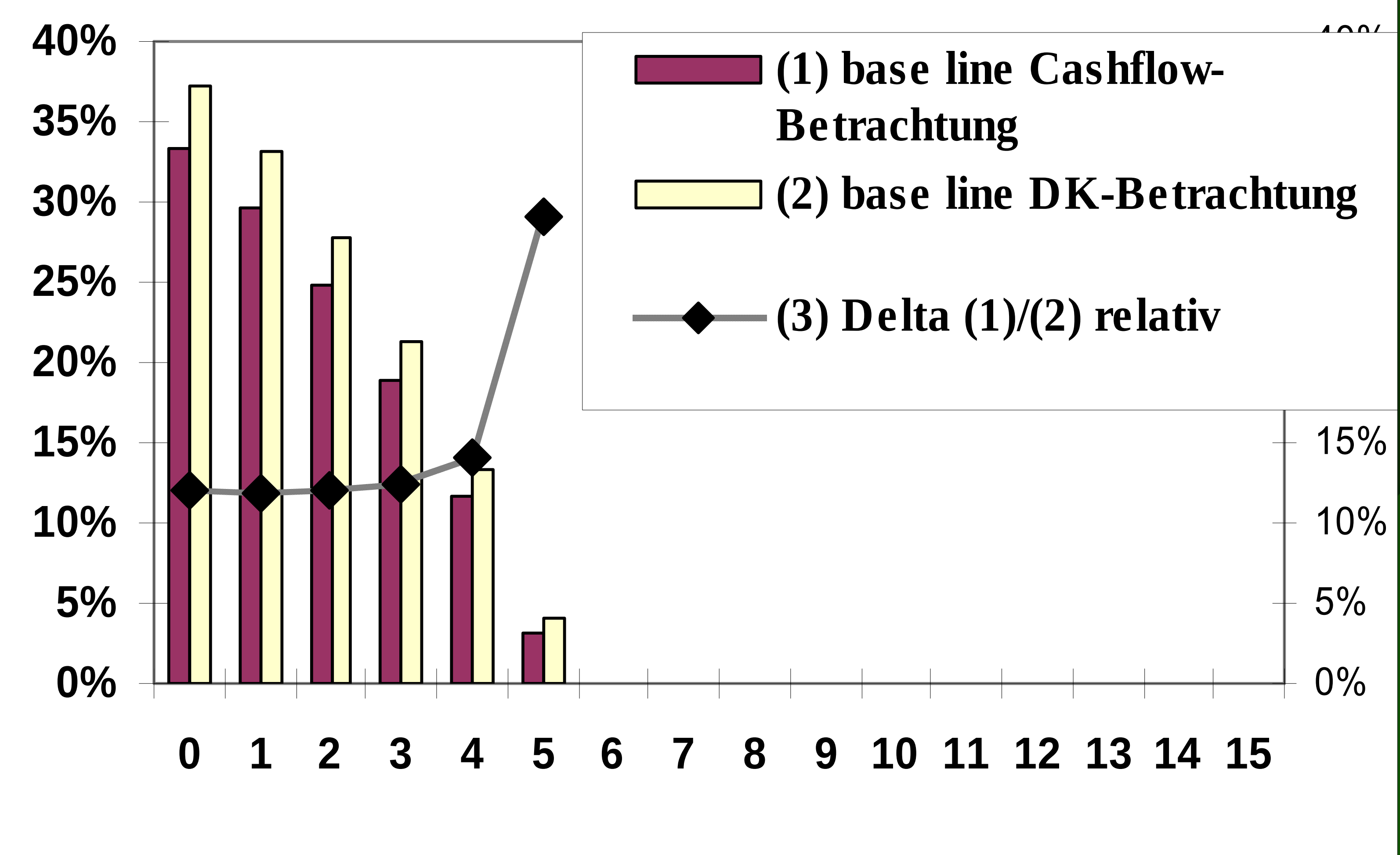
€ 03/2004 / € 06/2005



Beispiele zu V_{norm}



Beispiele zu V_{norm}



Beispiele zu V_{norm}

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Anzahl up-moves	base line ohne Übbet	base line mit Übbet	./. 1/4% ohne Übbet	./. 1/4% mit Übbet	σ + 5% ohne Übbet	σ + 5% mit Übbet
0	**33,30%**	**33,31%**	**34,01%**	**34,02%**	**38,26%**	**38,27%**
1	**29,55%**	**29,57%**	**30,45%**	**30,47%**	**35,10%**	**35,13%**
2	**24,79%**	**24,84%**	**25,92%**	**25,96%**	**30,72%**	**30,79%**
3	**18,88%**	**18,99%**	**20,26%**	**20,35%**	**24,77%**	**24,93%**
4	**11,69%**	**11,97%**	**13,34%**	**13,56%**	**16,95%**	**17,29%**
5	**3,19%**	**3,82%**	**5,10%**	**5,62%**	**7,07%**	**7,79%**
6	**0,00%**	**0,00%**	**0,00%**	**0,00%**	**0,00%**	**0,00%**
::	**::**	**::**	**::**	**::**	**::**	**::**
15	**0,00%**	**0,00%**	**0,00%**	**0,00%**	**0,00%**	**0,00%**

Modellierung Aufschubzeit:
mit dem Zins korrelierter Fondsprozess

$$dK_t = \mu \cdot K_t \cdot dt + \sigma_E \cdot K_t \cdot dW_E$$

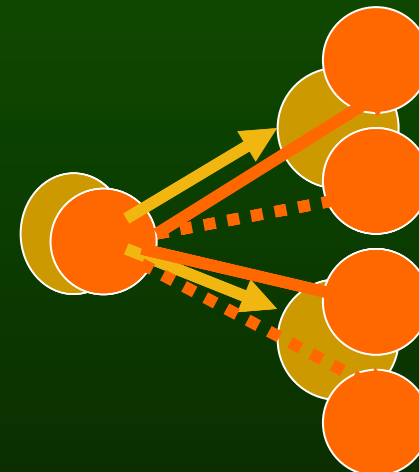
Ito-Lemma: $\mu' := \mu - \frac{\sigma_E^{\,2}}{2}$ $\quad K_t = K_0 \cdot e^{\mu' \cdot t + \sigma_E \cdot W_E}$

$$\rho(t) := \frac{COV\left(W_E(t); W_r(t)\right)}{t} \qquad W_S := \frac{W_E - \rho \cdot W_r}{\sqrt{1-\rho^2}} \qquad W_E = \sqrt{1-\rho^2} \cdot W_S + \rho \cdot W_r$$

$$COV\left(W_S(t); W_r(t)\right) = 0$$

Binomialbaum in der Aufschubzeit

$$b_0 := e^{\mu' \cdot \Delta t} \qquad b_1 := e^{\sigma_E \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \sqrt{\Delta t}} \qquad b_2 := e^{\sigma_E \cdot \rho \cdot \sqrt{\Delta t}}$$



$$\boldsymbol{K_{jkl}}$$

$$\boldsymbol{= K_{tj} = b_0^{j}\, b_1^{2l-j}\, b_2^{2k-j}}$$

für $0 \leq j \leq N$, $0 \leq k \leq j$ und $0 \leq l \leq j$ mit

- W_r hat *k up-moves* (*j-k down-moves*)
- W_S hat *l up-moves* (*j-l down-moves*)

Hedging-Ansatz

- Gegeben $\mathbf{V_{norm}}(\mathcal{F}) \in \mathbf{R}^{N+1}$
- Daraus ergeben sich per n = NΔt Bedarfe von $\beta_{kl} = V_{norm,k} K_{Nkl}$
  - für $0 \leq k \leq N$ und $0 \leq l \leq N$
- Repliziere von n = NΔt rückwärts die Bedarfe („wealth process“)

Unvollständiger Markt

- 4 Zustände von einem Knoten aus erreichbar
- Wenn 4 unabhängige Anlagearten vorhanden sind so 4x4 GLS pro Knoten zu lösen: $H\Pi = ß = (ß_1, ß_2, ß_3, ß_4)^T$
- Für Hedging 3 securities:
  - Cash-Bond C
  - Zero-Bond (2 periodisch) B
  - Fonds E

$$\Pi = (C,B,E)^T$$

Optimierungsaufgabe

- Was kann man tun?
- 1. Alternative:
  - minimiere <$H\Pi$-ß; $H\Pi$–ß>
- 2. Alternative:
  - minimiere <1;Π> NB: $H\Pi \geq$ ß

und man hat Glück:
kein Simplex-Algorithmus notwendig,
einfach direkt Ecken berechnen & Optimum auswählen

Reduktion der Komplexität

- Wegen der Struktur der einzelnen Optimierungsaufgaben pro Zeitschritt muss nur für einen Pfad des E-Prozesses gerechnet werden.
- Halbierung der Rechenschritte pro Zeitschritt
- Aber v.a.: keine Verzweigung

Gesamtalgorithmus

- Bestimme V_{norm}
- Löse bei durch Rückwärtsrechnung pro Zeitschritt :
- minimiere $<1;\Pi>$ NB: $H\Pi \geq ß$
- Optionswert $\leq <1;\Pi>$ bei $t=0$

Beispiele

- Zinskurve s.o.
- Endalter 65
- Mann

	n	base line ohne Übbet	base line mit Übbet	./. 1/4% ohne Übbet	ohne Übbet
$\rho = -25\%$	25	12,10%	12,33%	13,41%	14,30%
	15	5,84%	6,03%	6,69%	8,31%
	5	0,58%	0,63%	0,74%	1,17%
$\rho = -40\%$	25	13,20%	13,42%	14,55%	15,57%
	15	6,38%	6,58%	7,28%	9,03%
	5	0,62%	0,68%	0,79%	1,26%

Fazit

- Einfache Methode zur Bewertung
  - elegant und intuitiv
  - liefert Hedging-Strategie
- Nachteile:
  - Behandlung der Biometrie
  - bislang nur für EB
  - liefert nur Schranke

Einige Quellenhinweise

- Die allgemeinen klassischen Fundstellen wie „Hull“ erspare ich mir und gebe nur die spezielle Literatur an:

  Zum verwendeten Zinsmodell

  – F. J. Fabozzi, A. J. Kalotay, G. O. Williams: „Valuation of Bonds with Embedded Options”, *The Handbook of Fixed Income Securities; Irwin Professional Publishing, Chicago* (1997)

  Zur Korelation von Fonds und Zinsen

  – B. Meyer: „Steigende Anleiherenditen sind Gift für viele Aktienkurse”, *Frankfurter Allgemeine Zeitung* vom 9. Januar 2002

  – H.-O. Herr et al.: „Implizite Finanzoptionen“, *Band 32 der Reihe „Angewandte Versicherungsmathematik“ der DGVFM, VVW, Karlsruhe (2004)*

  Der Inhalt des Vortrages gibt Wesentliches des Abschnitts 8.4 dieses Buches wieder

Hans-Otto Herr

www.aktuar-herr.de

Gerne erwarte ich Anregungen, Kritik und Kommentare unter hans-otto.herr@dbv-winterthur.de